6.2.3 三角变换的应用（1）

一、填空题

$\sin(\alpha-\frac{\pi}{3})=\frac{1}{4}$

$\frac{1}{2}\sin\alpha-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha=\frac{1}{4}$　$\cos(\alpha-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2})=-\sin(\alpha-\frac{\pi}{3})$

1.（★）已知 $\sin\alpha-\sqrt{3}\cos\alpha=\frac{1}{2}$，$\cos(\alpha+\frac{\pi}{6})=$ $\underline{-\frac{1}{4}}$.

2.（★）已知 $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，$\tan\alpha=-2$，则 $\sin(\pi+2\alpha)=$ $\underline{\frac{4}{5}}$.　$-\sin2\alpha=-2\sin\alpha\cos\alpha$

3.（★）已知 α 为锐角且 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=2\cos2\alpha$，则 $\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=$ $\underline{-\frac{1}{4}}$.

$\sin(\alpha+\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2})=-\cos(\alpha+\frac{\pi}{4})$

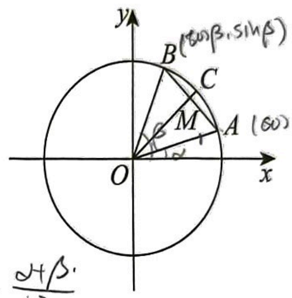
4.（★）若 $\tan\theta=-3$，则 $\sin2\theta=$ $\underline{-\frac{3}{5}}$.　$=2\sin\theta\cos\theta=-2\cdot\frac{3}{10}=-\frac{3}{5}$

5.（★）函数 $f(x)=2\sin(\frac{\pi}{3}+4x)+\sin(4x-\frac{\pi}{6})$ 的最大值为 $\underline{\sqrt{5}}$.

6.（★★）公元前 6 世纪，古希腊的毕达哥拉斯学派通过研究正五边形和正十边形，发现了黄金分割值约为 0.618，这一数值（记为 m）也可以表示为 $m=2\sin18°$．若 $m^2+n=4$，则 $\frac{m-\sqrt{n}}{\cos63°}=$ $\underline{-2\sqrt{5}}$.

$n=4-4\sin^2 18°=4\cos^2 18°$

7.（★★）如图所示，已知角 α，$\beta(0<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2})$ 的始边为 x 轴的非负半轴，终边与单位圆的交点分别为 A,B,M 为线段 AB 的中点，射线 OM 与单位圆交于点 C，则以下结论正确的有 $\underline{①②③}$.



①$\angle AOB=\beta-\alpha$；

②$|OM|=\cos\frac{\beta-\alpha}{2}$；　$1\cdot\cos\frac{\beta-\alpha}{2}$

③点 C 的坐标为 $\left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2},\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$；　角：$\alpha+\frac{\beta-\alpha}{2}=\frac{\alpha+\beta}{2}$

④点 M 的坐标为 $\left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\beta-\alpha}{2},\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2}\right)$　$\left(\frac{\cos\alpha+\cos\beta}{2},\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{2}\right)$

8.（★★）若 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$\beta\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，且 $(1+\cos2\alpha)(1+\sin\beta)=\sin2\alpha\cos\beta$，则 $2\tan\alpha-\tan\beta$ 的最小值为______.

9.（★★★）若 $x^2+3y^2+3xy=4$，则 $x^2-\frac{3}{2}y^2$ 的范围为______.

二、单选题

$3\sin\theta+4\cos\theta=5\sin\Delta$

10.（★）已知 $x^2+y^2=1$，则 $3x+4y$ 的最大值（B）

A．4　　B．5　　C．6　　D．7

11.（★★）若 $\theta=\theta_0$ 时，$f(\theta)=\sin2\theta-\cos^2\theta$ 取得最大值，则 $\sin\left(2\theta_0+\frac{\pi}{4}\right)=$（D）

A．$\frac{\sqrt{10}}{10}$　　B．$\frac{3\sqrt{10}}{10}$　　C．$\frac{\sqrt{5}}{5}$　　D．$\frac{2\sqrt{5}}{5}$

$f(\theta)=\sin2\theta-\cos^2\theta$

$=\sin2\theta-\frac{1+\cos2\theta}{2}$

$=\sin2\theta-\frac{1}{2}\cos2\theta-\frac{1}{2}$

$=\frac{\sqrt{5}}{2}\sin(2\theta-\varphi)-\frac{1}{2}$

12.（★★★）定义域在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $f(x)=\frac{-2^x+a}{2^{x+1}+2}$．若存在 $\theta\in\left[-\frac{\pi}{4},0\right]$，使得

$f(\theta)\le\frac{\sqrt{5}}{2}-\frac{1}{2}$

$\sin(2\theta_0-\varphi)=1$，$\cos(2\theta_0-\varphi)=0$

$\sin2\theta_0=\sin[(2\theta_0-\varphi)+\varphi]$

$=\sin(2\theta_0-\varphi)\cos\varphi+\cos(2\theta_0-\varphi)\sin\varphi$

$=1\cdot\frac{2\sqrt{5}}{5}+0$

$=\frac{2\sqrt{5}}{5}$

$\cos2\theta_0=-\frac{\sqrt{5}}{5}$

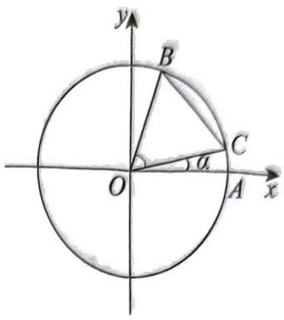
$\sin\varphi=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\cos\varphi=\frac{2\sqrt{5}}{5}$

$f\left(\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta\right)+f\left(k-\cos^2\theta\right)>0$成立，则实数$k$的取值范围为（　）

A. $(2,+\infty)$　　B. $\left(\frac{3}{2},+\infty\right)$　　C. $(-\infty,2)$　　D. $\left(-\infty,\frac{3}{2}\right)$

三、解答题

13.（★）如图，单位圆O与x轴的正半轴的交点为A，点C，B在圆O上，且点C位于第一象限，点B的坐标为$\left(\frac{2}{5},\frac{\sqrt{21}}{5}\right)$，$\angle AOC=\alpha$，$\triangle BOC$为正三角形.



(1)求$\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sqrt{3}\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2}$的值；

(2)化简$\dfrac{\sin(\pi-\alpha)\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}{\cos(2\pi-\alpha)\cos(\pi+\alpha)}$，并求其值.

(1) 原式 $=\frac{1+\cos\alpha}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha-\frac{1}{2}$

$=\frac{1}{2}\cos\alpha-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha$

$=-(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha-\frac{1}{2}\cos\alpha)$

$=-\sin(\alpha-\frac{\pi}{6})$.

∴ 原式 $=\frac{1}{2}\cos\alpha-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha$

$=\cos(\alpha+\frac{\pi}{3})$

$=\cos\beta=\frac{2}{5}$

由题 $\begin{cases}\sin\beta=\frac{\sqrt{21}}{5}\\ \cos\beta=\frac{2}{5}\end{cases}$ ∴ $\begin{cases}\sin\alpha=\sin(\beta-\frac{\pi}{3})=\frac{1}{2}\sin\beta-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\beta=\frac{\sqrt{21}-2\sqrt{3}}{10}\\ \cos\alpha=\cos(\beta-\frac{\pi}{3})=\frac{1}{2}\cos\beta-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\beta=\frac{2-3\sqrt{7}}{10}\end{cases}$

(2) 原式 $=\frac{\sin\alpha\cos\alpha(-\cos\alpha)}{\cos\alpha(-\cos\alpha)}$

$=\sin\alpha=\frac{\sqrt{21}-2\sqrt{3}}{10}$

14.（★）(1) 已知$\cos\alpha-\cos\beta=\frac{1}{2},\sin\alpha-\sin\beta=-\frac{1}{3}$，求$\sin(\alpha+\beta)$的值；

(2) 已知$\cos\alpha-\cos\beta=\frac{1}{2},\sin\alpha-\sin\beta=-\frac{1}{3}$，试求$\cos(\alpha+\beta)$的值；

(1) $\begin{cases}\frac{1}{2}=\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\\ -\frac{1}{3}=\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\end{cases}$

∴ $-\tan\frac{\alpha+\beta}{2}=-\frac{3}{2}$

$\tan\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{3}{2}$

$\sin(\alpha+\beta)=\frac{2\tan\frac{\alpha+\beta}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha+\beta}{2}}=\frac{3}{1+\frac{9}{4}}=\frac{12}{13}$.

(2) 由(1). $\cos(\alpha+\beta)$ $\tan\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{3}{2}$

$=\frac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}$

$=\frac{1-\frac{9}{4}}{1+\frac{9}{4}}$

$=\frac{-5}{13}$.

15.（★）已知$\tan(\pi+\alpha)=\frac{1}{2},\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

(1)求$\dfrac{2\sin\alpha+3\cos\alpha}{2\cos\alpha-\sin\alpha}$的值；(2)若$\sin(\alpha-\beta)=-\frac{\sqrt{10}}{10}$，求锐角$\beta$的值.

由题 $\tan\alpha=\frac{1}{2}$

(1) 原式 $=\frac{2\tan\alpha+3}{2-\tan\alpha}$

$=\frac{4}{2-\frac{1}{2}}$

$=\frac{8}{3}$.

(2) ∵ $\alpha\in(0,\frac{\pi}{2})$

$\beta\in(0,\frac{\pi}{2})$

$-\alpha\in(-\frac{\pi}{2},0)$.

∴ $\beta-\alpha\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$

∴ $\begin{cases}\sin(\beta-\alpha)=\frac{\sqrt{10}}{10}\\ \cos(\beta-\alpha)=\frac{3\sqrt{10}}{10}\end{cases}$ $\begin{cases}\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}\\ \cos\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}\end{cases}$

∴ $\sin\beta=\sin(\beta-\alpha+\alpha)=\sin(\beta-\alpha)\cos\alpha+\cos(\beta-\alpha)\sin\alpha$

$=\frac{1}{\sqrt{10}}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}+\frac{3}{\sqrt{10}}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}$

$=\frac{5}{\sqrt{50}}=\frac{2}{5\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. $\beta\in(0,\frac{\pi}{2})$ ∴ $\beta=\frac{\pi}{4}$

16、（★★）已知$\alpha\in(0,\pi)$，且$\sin\alpha+\cos\alpha=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

(1)求$\tan\alpha$的值；

(2)求$\sin\alpha\cos\alpha+\cos2\alpha$的值；

(3)若$\beta\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，$\tan(\alpha+\beta)=-\dfrac{1}{3}$，求$2\alpha+\beta$的值.

(1) $\begin{cases}\sin\alpha+\cos\alpha=-\frac{\sqrt5}{5}\\ \sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1\\ \alpha\in(0,\pi)\end{cases}$

$\therefore \begin{cases}\sin\alpha=\frac{\sqrt5}{5}\\ \cos\alpha=-\frac{2\sqrt5}{5}\end{cases}$

$\therefore \tan\alpha=-\frac{1}{2}$.

(2) 原式 $=\sin\alpha\cos\alpha+2\cos^2\alpha-1$

$=\frac{1}{\sqrt5}\cdot(-\frac{2}{\sqrt5})+2\cdot\frac{4}{5}-1$

$=-\frac{2}{5}+\frac{8}{5}-\frac{5}{5}$

$=\frac{1}{5}$

(3) 由(1)，$\alpha\in(\frac{\pi}{2},\pi)$.

$\beta\in(0,\frac{\pi}{2})$.

$2\alpha\in(\pi,2\pi)$

$2\alpha+\beta\in(\pi,\frac{5\pi}{2})$ - 三四象限

$\tan(2\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan(\alpha+\beta)}{1-\tan\alpha\tan(\alpha+\beta)}$

$=\dfrac{-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}{1-(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{3})}=\dfrac{-\frac{5}{6}}{\frac{5}{6}}=-1$.

$\therefore 2\alpha+\beta=\frac{7}{4}\pi$

17.（★★★）16世纪法国的数学家韦达在其三角学著作《应用于三角形的数学定律》中给出了积化和差与和差化积恒等式.运用积化和差与和差化积恒等式解决下列问题：

(1)证明：$\cos^2\alpha-\sin^2\beta=\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)$；

(2)若$\alpha+\beta+\gamma+\omega=\pi$，证明：$\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha+\gamma)=\sin\alpha\sin\omega+\sin\beta\sin\gamma$；

(3)若函数$f(x)=\dfrac{\sin x}{2}+\dfrac{\sin3x}{4}+\dfrac{\sin5x}{6}+\cdots+\dfrac{\sin99x}{100},x\in(0,2\pi)$，判断$f(x)$的零点个数，并说明理由.